

۱- گزینه ۱ صحیح است.

از هم ارزی رادیکالی $\sqrt[n]{ax^n + bx^{n-1} + \dots} \sim \sqrt[n]{a}(x + \frac{b}{na})$ استفاده میکنیم.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt[n]{(x + a_1)(x + a_2) \dots (x + a_n)} - x) &= \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt[n]{x^n + (a_1 + a_2 + \dots + a_n)x^{n-1} + \dots} - x) \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} (x + \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} - x) = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \end{aligned}$$

۲- گزینه ۳ درست است.

ابتدا حد را به صورت کسری مینویسیم، مخرج مشترک گیری کرده و جایگذاری میکنیم.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin 3x}{x^3} + \frac{a}{x^2} + b \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x + ax + bx^3}{x^3} = \frac{0}{0}$$

حالا از هم ارزی استفاده می کنیم که با توجه به مخرج کسر هم ارزی را تا جمله x^3 ادامه می دهیم.

$$\sin u = u - \frac{u^3}{3!} + \dots$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x - \frac{(3x)^3}{3!} + ax + bx^3}{x^3} = \frac{(3+a)x + (-\frac{9}{2} + b)x^3}{x^3} = 0 \Rightarrow \begin{cases} 3+a=0 \rightarrow a=-3 \\ -\frac{9}{2}+b=0 \rightarrow b=\frac{9}{2} \end{cases}$$

۳- گزینه ۳ صحیح است.

برای حل ابتدا جایگذاری می کنیم.

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\sqrt{2} \sin \frac{\pi}{4} \right)^{\frac{1}{x}} = 1^\infty$$

با استفاده از فرمول این حالت ابهام داریم:

$$\lim_{x \rightarrow 0} (f(x))^g(x) = e^{\lim_{x \rightarrow 0} g(x)(f(x)-1)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\right)^{\frac{2}{x}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2}{x}(\sqrt{2} \sin(x + \frac{\pi}{4}) - 1)} \stackrel{0}{=} \xrightarrow{HOP} e^{\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2\sqrt{2} \cos(x + \frac{\pi}{4})}{1}} = e^2$$

۴- گزینه ۲ صحیح است.

ابتدا جایگذاری می کنیم

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)(2^x - 1)}{(\arcsin x)^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1)(1-1)}{0^2} = \frac{0}{0}$$

از هم ارزی ها برای ساده سازی کسر استفاده می کنیم.

$$\ln(u+1) \underset{u \rightarrow 0}{\sim} u$$

$$\arcsin u \underset{u \rightarrow 0}{\sim} u$$

حال با استفاده از قاعده هوییتال حد ساده شده را حل می کنیم.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)(2^x - 1)}{(\arcsin x)^2} \sim \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(2^x - 1)}{x^2} \stackrel{HOP}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(2^x - 1) + x(2^x \ln 2)}{2x} = \frac{0}{0}$$

$$\xrightarrow{HOP} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^x \ln 2 + 2^x \ln 2 + x(2^x (\ln 2)^2)}{2} = \frac{2 \ln 2}{2} = \ln 2$$

۵- گزینه ۲ صحیح است.

برای $x > 0$ صورت و مخرج تابع $f(x)$ پیوسته است پس ناپیوستگی در ریشه مخرج ($x = 1$) می باشد.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - \sqrt{x}}{x - 1} = \frac{0}{0} \xrightarrow{HOP} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \frac{1}{2\sqrt{x}}}{1} = \frac{1}{2}$$

لذا A نقطه ای به مختصات $(1, \frac{1}{2})$ می باشد؛ پس باید فاصله این نقطه را از خط مجانب منحنی بیابیم.

تابع مجانب قائم ندارد اما در بی‌نهایت مجانب افقی دارد ($\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - \sqrt{x}}{x - 1} = 1$)

فاصله A از این خط مجانب برابر $H = \sqrt{(1-1)^2 + (1-\frac{1}{2})^2} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$ می‌باشد.